



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = nx^{n-1}$, δηλαδή $(x^n)' = nx^{n-1}$

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Πότε λέμε ότι το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $A = (-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$, συνεχής στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε η f είναι σταθερή στο A .

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα A , αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδές

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση "1-1", αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$ τότε κατ' ανάγκη είναι $f(\beta) > 0$

δ) Αν η f είναι συνεχής στο (α, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο (α, β) μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή.

ε) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β



Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2 f'(x) = x^2 + 2 \ln x - 1$
- Η C_f διέρχεται από το σημείο $N(1,0)$

B1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 - 2 \ln x - 1}{x}, x > 0$

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

Μονάδες 4

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

Μονάδες 5

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

Μονάδες 7

B5. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{x^2 + ax + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -2$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $a = -4$.

Μονάδες 4

Για $a = -4$

Γ2. Να βρεθεί το όριο $\Delta = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^2(x) - xf(x)}{x}$

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Γ4. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) = e - f'(x)$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2)

Μονάδες 5

Γ5. Ένα κινητό $M(x, f(x))$, με $x \geq 2$, ξεκινά απ' το σημείο $A(2, f(2))$ και κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f με θετικό ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του για κάθε χρονική στιγμή t . Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M ισούται με το πηλίκο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του M προς την τεταγμένη του M .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ



Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να δείξετε ότι:

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$ (Μονάδες 4) και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x) - x - 3 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 2)

Μονάδες 5

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$ και $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

Δ4. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

Μονάδες 6

Δ5. Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή του.

Μονάδες 5